

Τὸ ἀριθμητικὸ λάθος τοῦ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, ὡς πρὸς τὰ τμήματα 12-9-7, καὶ τὸ ἀσυμβίβαστον τῆς μεθοδολογίας του

τοῦ Δρ. Παναγιώτη Δ. Παπαδημητρίου

Ὡς γνωστόν, ὁ Χρυσάνθος δίνει τὴν διατονικὴ κλίμακα σὲ τμήματα 12-9-7-12-12-9-7. Κατ' ἀρχὴν χρειάζεται προσοχὴ καθότι τὰ τμήματα τοῦ Χρυσάνθου προκύπτουν ἀπὸ σχέσεις λόγων, «τὰ διαστήματα, δι κε, κε ζω, ζω νη... ἔχουσι λόγον τοιοῦτον, 12, 9, 7...», καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν εἶναι τὰ γνωστά μας ἀκουστικὰ τμήματα (κόμματα), ὡς π.χ. τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881, ἢ τῆς Εὐρωπαϊκῆς μουσικῆς. Ἀνεξαρτήτως αὐτοῦ, εἶναι γεγονός (καὶ ἄγνωστο ἐν πολλοῖς) ὅτι οἱ ἀπλοὶ ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ τοῦ Χρυσάνθου στὸν προσδιορισμὸ τῶν τμημάτων 12, 9, 7 εἶναι μερικῶς λανθασμένοι. Τὴν ὑπόδειξη τοῦ λάθους τοῦ Χρυσάνθου ἐπισημαίνει ἡ Ἐπιτροπὴ τοῦ 1881², ἀλλὰ χωρὶς ἀρκετὲς λεπτομέρειες, ἀσκῶντας πάντως δριμυτάτη κριτικὴ. Σὲ αὐτὸ τὸ ἄρθρο μας, ὑποδεικνύουμε τὸ ἀριθμητικὸ λάθος τοῦ Χρυσάνθου (δηλ. σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία του: τὰ τμήματα δι-κε, κε-ζω, ζω-νη εἶναι 12, 8, 7, καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων του εἶναι ὄχι 68, ἀλλὰ 66), ἀλλὰ καὶ τὸ ἀσυμβίβαστον τῆς μεθοδολογίας του, καὶ σχολιάζουμε σχετικᾶ.

1. Ἡ διατονικὴ κλίμακα τοῦ Χρυσάνθου.

Ὁ καθορισμὸς τῶν διαστημάτων (τῆς διατονικῆς κλίμακας) κατὰ τὸν Χρυσάνθο, δίνεται στὶς σελίδες 26-28 τοῦ μεγάλου θεωρητικοῦ του³ (σχῆμα 1):

- Διαίρεσε τὸ διάστημα Ο-Δι (μήκους 1) σὲ 9 ἴσα μέρη καὶ βάλε τὸν κε ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ Δι. Ἄρα,

$$Ο-κε = 8/9, \text{ καὶ } Δι-κε = 1/9.$$

- Διαίρεσε τὸ διάστημα Ο-κε σὲ 12 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν ζω ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ κε. Ἄρα,

$$Ο-ζω = 8/9 - 8/9 \times 1/12 = 22/27, \text{ καὶ } κε-ζω = 8/9 \times 1/12.$$

¹ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, Θεωρητικὸν Μέγα τῆς Μουσικῆς, Τεργέστη 1832 (ἀνατύπωσις ἐκδ. Κουλτούρα), σ. 26.

² Μουσικὴ Ἐπιτροπὴ τοῦ Οἴκ. Πατρ. (1881), Στοιχειώδης διδασκαλία τῆς Ἐκκλησιαστικῆς Μουσικῆς - ἐκπονηθεῖσα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ψαλτηρίου, Κωνσταντινούπολις 1888 (ἀνατύπ. ἐκδ. Κουλτούρα), σ. 10.

³ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, ὁ.π..

- Διαίρεσε τὸ διάστημα Ο-Δι σὲ 4 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν **νη** ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ Δι. Ἄρα,

$$Ο-νη = 3/4, \text{ καὶ } ζω-νη = 22/27 - 3/4 = 7/108.$$

- Διαίρεσε τὸ Ο-νη σὲ 9 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν **πα** ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ νη. Ἄρα,

$$Ο-πα = 8/9 \times 3/4 = 2/3, \text{ καὶ } νη-πα = 3/4 - 2/3 = 1/12.$$

- Διαίρεσε τὸ Ο-πα σὲ 12 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν **βου** ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ πα. Ἄρα,

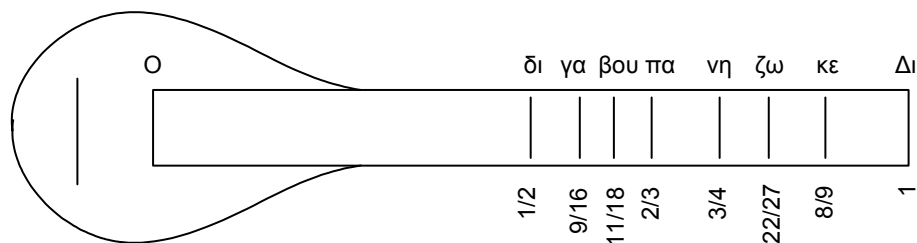
$$Ο-βου = 11/12 \times 2/3 = 11/18, \text{ καὶ } πα-βου = 2/3 - 11/18 = 1/18.$$

- Διαίρεσε τὸ Ο-Δι σὲ 2 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν **δι**. Ἄρα,

$$Ο-δι = 1/2 \times 1 = 1/2.$$

- Διαίρεσε τὸ δι-Δι σὲ 8 ἴσα μέρη, καὶ βάλε τὸν **γα** ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ ἀπὸ τοῦ δι. Ἄρα

$$Ο-γα = 1/2 + 1/8 \times 1/2 = 9/16, \text{ καὶ } βου-γα = 11/18 - 9/16 = 7/144, \text{ καὶ } γα-δι = 9/16 - 1/2 = 1/16.$$



Σχῆμα 1. Κατασκευή τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Χρυσάνθου.

2. Ο ύπολογισμός τῶν τμημάτων κατὰ τὸν Χρῦσανθο καὶ τὸ λάθος του.

Γράφει ὁ Χρῦσανθος, στὴν σ. 26 τοῦ μεγάλου θεωρητικοῦ⁴ του:

«Τὰ διαστήματα δι κε, κε ζω, ζω νη, ὅτι ἔχουσι λόγον τοιοῦτον, 12, 9, 7, δεικνύεται ἐντεῦθεν· ὡς δι κε : κε ζω :: 1/9 : 1/12, ἤγουν 4/36 : 3/36. ἀλλὰ μὴν ὡς 4/36 : 12 :: 3/36 : χ, ὅ ἐστι, 4 : 12 · 36 :: 3 : 36 χ, ἄρα 4 · 36 χ = 12 · 36 · 3. ἄρα χ=9.

Ὅταν ὅλη ἢ χορδὴ ὑποτεθῆ 27, τῷ μὲν Δι ἀναλογεῖ τὸ 27/27 κλάσμα, ἤγουν τὸ 1. τῷ δὲ κε, τὸ 24/27, ἤγουν τὸ 8/9. τῷ δὲ ζω, τὸ 22/27. καὶ τῷ νη, τὸ 3/4. ἄρα καὶ τῷ διαστήματι ζω νη, τὸ 7/108. διότι $1/4 - 5/27 = 27/108 - 20/108 = 7/108$. ὅθεν ὡς δι κε : ζω νη :: 1/9 : 7/108. ἀλλὰ μὴν ὡς $1/9 : 12 :: \frac{7}{12 \cdot 9} : \chi$. ἄρα $1/9 \chi = \frac{12 \cdot 7}{12 \cdot 9} = 7/9$. ὥστε $\chi = \frac{7 \cdot 9}{9 \cdot 1} = 63/9 = 7$.

Οἱ παραπάνω ὑπολογισμοὶ τοῦ Χρυσάνθου⁵, θὰ μπορούσαν νὰ γραφοῦν ἀπλούστατα ὡς ἑξῆς:

$$\text{«δι κε : κε ζω} = 1/9 : 1/12 = 12/9$$

καὶ

$$\text{δι κε : ζω νη} = 1/9 : 7/108 = 12/7\text{»}.$$

Ἄρα ἔδειξε ὁ Χρῦσανθος ὅτι τὰ διαστήματα δι κε, κε ζω, ζω νη, «ἔχουσι λόγον τοιοῦτον, 12, 9, 7».

Ποιὸ εἶναι ὅμως τὸ λάθος του;

Τὸ λάθος του εἶναι ὅτι θεωρεῖ τὸ διάστημα κε-ζω = 1/12, ἐνῶ ὅπως δείξαμε στὴν παράγραφο §1, κε-ζω = 8/9 x 1/12.

Ἄρα τὰ διαστήματα, σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία τοῦ Χρυσάνθου, ἔχουν στὴν πραγματικότητα λόγο:

$$\text{δι κε : κε ζω} = 1/9 : (8/9 \times 1/12) = 12/8$$

καὶ

$$\text{δι κε : ζω νη} = 1/9 : 7/108 = 12/7.$$

⁴ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, ὁ.π..

⁵ Οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ Χρυσάνθου μερδεύουν μὲ τὴν πρώτη ματιά, καθότι «κοινῶς» πάει Κόρινθο Ἀθήνα, μέσω Ρίου-Ἀντιρρίου. Ἐπίσης, ὁ Χρῦσανθος στοὺς ὑπολογισμοὺς του, ὅταν ἐμφανίζει τὸ 12 καὶ τὸ χ, ὑποννοεῖ ὅτι τὸ 12 ἀντιστοιχεῖ στὸ δι κε, καὶ φυσικὰ τὸ χ στὸ ἄλλο (ζητούμενο) διάστημα.

δηλαδή τὰ διαστήματα δι-κε, κε-ζω, ζω-νη ἔχουν λόγο **12, 8, 7**, καὶ ὄχι 12, 9, 7 ὅπως ἔδειξε ὁ Χρῦσανθος (καὶ ἔπεισε σχεδὸν τοὺς πάντες). Αὐτὸ τὸ λάθος τὸ σημειώνει καὶ ἡ Ἐπιτροπὴ τοῦ 1881 ὡς προαναφέραμε στὴν ἀρχή.

Νὰ σημειώσουμε ὅτι ὁ Χρῦσανθος ἐπαναλαμβάνει τὸ λάθος του στὶς σ. 97-98 τοῦ μεγάλου θεωρητικοῦ⁶ του: «Ὅταν ὑποτεθῆ τὸ δι κε ἴσον 12, εὐρίσκεται τὸ μὲν κε ζω ἴσον 9, τὸ δὲ ζω νη ἴσον 7. Τότε καὶ ἐπὶ τῆς χορδῆς εὐρίσκεται τὸ δι κε νὰ ἔχη λόγον πρὸς μὲν τὸν κε ζω, ὄν $1/9 : 1/12$ · πρὸς δὲ τὸ ζω νη, ὄν $1/9 : 7/108$ ».

3. Τὸ ἀσυμβίβαστον τῆς μεθοδολογίας τοῦ Χρυσάνθου.

Δείξαμε ὅτι:

$$\text{(μείζων : ἐλάσσων)} - \text{δι κε} : \text{κε ζω} = 12/8,$$

καὶ

$$\text{(μείζων : ἐλάχιστος)} - \text{δι κε} : \text{ζω νη} = 12/7.$$

Εὐκόλα δεικνύεται ὅτι:

$$\text{(μείζων : ἐλάσσων)} - \text{νη πα} : \text{πα βου} = 12/8,$$

καὶ

$$\text{(μείζων : ἐλάχιστος)} - \text{νη πα} : \text{βου γα} = 12/7.$$

Ὅμως, τὸ ἀσυμβίβαστον τῆς μεθοδολογίας τοῦ Χρυσάνθου εἶναι ὅτι, σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία του, θὰ ἔπρεπε π.χ.

$$\text{μείζων} : \text{μείζων} = 1 (=12/12),$$

καθότι ὅταν δίνει τὴν κλίμακα, δίνει π.χ. νη πα = γα δι = δι κε = 12. Ὅμως δὲν εἶναι ἔτσι γιὰ διαφορετικούς μείζονες τόνους, π.χ.

$$\text{δι κε} : \text{νη πα} = 1/9 : 1/12 = 12/9.$$

Τὸ ἀσυμβίβαστον, ὁ Χρῦσανθος τὸ ...λύνει λέγοντας⁷: «ἂν ὑποτεθῆ ὅτι τὸ διάστημα τοῦ μείζονος τόνου εἶναι ἴσον μὲ 12 γραμμὰς, τὸ διάστημα τοῦ μὲν ἐλάσσονος τόνου εὐρίσκεται ἴσον μὲ 9 γραμμὰς, τοῦ δὲ ἐλάχιστου τόνου εὐρίσκεται ἴσον μὲ 7 γραμμὰς».

Ὅποτε νομίζουμε (ἀναφερόμενοι στὴν διατονικὴ κλίμακα), καθότι ὁ Χρῦσανθος ἀποκρύπτει οὐσιαστικὲς λεπτομέρειες (ἐνῶ πολλαχοῦ ἀναλύει ὀφθαλμοφανέστατα πράγματα), ὅτι θέτει ὅλους τοὺς μείζονες 12 γραμμές, καὶ μετὰ, ἀπὸ τοὺς ἀντίστοιχους

⁶ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, ὁ.π..

⁷ Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, ὁ.π., σ. 21.

μείζονες του ἑκάστου τετραχόρδου ὑπολογίζει στὰ ἀντίστοιχα τετράχορδα (π.χ. Δι-νη, νη-γα, στὸ σχῆμα 1) τοὺς ἐλάσσονες σὲ 8 (9), καὶ τοὺς ἐλάχιστους σὲ 7, σύμφωνα μὲ τὶς παραπάνω σχέσεις. Ὅμως ἂν εἶναι ὄντως ἔτσι, δὲν ὑπάρχει μαθηματικὴ ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν τμημάτων (γραμμῶν) του, καὶ τῆς διατονικῆς του, ὅπως τὴν δίνει στὸ σχῆμα 1 (μαθηματικὴ ἀντιστοιχία ὑπάρχει μόνο στὰ ἐπιμέρους τετράχορδα, καὶ ὄχι σὲ ὅλην τὴν κλίμακα).

4. Σχόλια.

Βάσει τῶν προηγουμένων, ἡ διατονικὴ κλίμακα τοῦ Χρυσάνθου σὲ τμήματα (καθὼς τὰ ὀρίζει αὐτός, καὶ παραθεωρώντας τὸ ἀσυμβίβαστον τῆς μεθοδολογίας του) εἶναι

12-8-7-12-12-8-7,

καὶ τὸ ὁποῖο ἔχει σὰν συνέπεια ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων του εἶναι 66 καὶ ὄχι 68!

Μᾶς ἐκπλήσει πάντως τὸ γεγονός, ὅτι αὐτὸ τὸ ἀπλὸ ἀριθμητικὸ λάθος τοῦ Χρυσάνθου εἶναι ἐν πολλοῖς ἄγνωστο τὴν σήμερον, ὅπως ἐπίσης καὶ τὸ ἀσυμβίβαστο τῆς μεθοδολογίας του. Ἐπίσης τὰ τμήματά του, ὡς λέει ὁ Χρυσάνθος καὶ ἀναφέραμε στὴν ἀρχή, προκύπτουν ἀπὸ σχέσεις λόγων, «τὰ διαστήματα, δι κε, κε ζω, ζω νη,... ἔχουσι λόγον τοιοῦτον, 12, 9, 7...», καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν εἶναι τὰ γνωστά μας ἀκουστικὰ τμήματα (κόμματα), ὡς π.χ. τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881, ἢ τῆς Εὐρωπαϊκῆς μουσικῆς.

Νὰ τονίσουμε ὅτι δὲν βάλλουμε τώρα κατὰ τοῦ Χρυσάνθου γιὰ τὸ ἀριθμητικὸ του λάθος (καὶ γιὰ τὴν ὅποια «θεωρία» του), κάτι πὺ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ. Ὅμως, τὸ θέμα εἶναι ἄλλο. Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ προτείνει κάποιος (ὁ Χρυσάνθος ἐν προκειμένῳ) μιὰ καινὴ θεωρία, μὲ μαθηματικοὺς ὑπολογισμοὺς πὺ θυμίζουν μαθητὴ ΣΤ' Δημοτικοῦ, στὸ Οἰκουμενικὸ Πατριαρχεῖο, στοὺς τότε Ψάλτες, καὶ ὅλοι νὰ τὴν ἀποδέχονται χωρὶς κὰν νὰ τὴν ἐλέγξουν; Γιατὶ ἂν τὴν ἔλεγχαν (ἐκτὸς καὶ ἂν δὲν εἶχαν τὶς γνώσεις νὰ τὴν ἐλέγξουν) ἔστω καὶ τυπικῶς, τὸ πρῶτο πράγμα πὺ θὰ ἔλεγχαν θὰ ἦταν οἱ κλίμακες (χωρὶς κλίμακα, τὶ ψέλνεις;). Παρόμοιο ἐρώτημα ἀπευθύνεται φυσικὰ, καὶ στοὺς ἕτερους θεωρητικούς τῆς τότε ἐποχῆς πὺ ἀντέγραψαν τὰ ἀποτελέσματα τῆς «θεωρίας» τοῦ Χρυσάνθου. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἐρωτήματα, ἐμεῖς βλέπουμε τὴν τότε προχειρότητα, καὶ τὴν ἀδικαιολόγητη (ἢ δικαιολογημένη γιὰ ἄγνωστους σὲ ἐμᾶς λόγους) βιασύνῃ στὴν ἀποδοχή, ἀλλὰ καὶ ἀστραπιαῖα διάδοση τῆς Νέας Μεθόδου.

Τέλος, ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἡ Ἐπιτροπὴ τοῦ 1881 μιλώντας γιὰ τὴν ἐργασία τοῦ Χρυσάνθου στὴν κλίμακα, μιλάει γιὰ «ἐν πολλοῖς ἐσφαλμένη, φαντασιώδη καὶ ἀόριστο» ἐργασία⁸.

⁸ Μουσικὴ Ἐπιτροπὴ τοῦ Οἴκ. Πατρ. (1881), ὁ.π., σ. 9, 10.